Bellavista, 17 de octubre, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN DECANAL N° 121-2022-D-FCNM. - Bellavista 17 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el OFICIO Nº 02-2022-JET-EPM-FCNM, recibido en forma virtual el 06 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD", presentado por la Srta. Bachiller ITA RAMÓN DENISSE DEL PILAR, ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

CONSIDERANDO:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, de fecha el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, Asesores, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante RESOLUCIÓN DECANAL Nº 085-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022 se Designó, Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD", presentado por la Srta. Bachiller ITA RAMÓN DENISSE DEL PILAR; Jurado que está integrado por los siguientes profesores: Dr. JULIO CÉSAR NÚÑEZ VILLA (Presidente), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Vocal), Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA (Secretario), Lic. GABRIEL RODRÍGUEZ VARILLAS (Suplente);

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Que, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 06 de octubre de 2022, el Dictamen del proyecto de Tesis titulado "ANALISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD", presentado por la Srta. Bachiller ITA RAMÓN DENISSE DEL PILAR, el cual, ha sido evaluado en su forma y fondo, dictaminando su aprobación;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

1º. APROBAR, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: "**ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD**", presentado por la Srta. Bachiller ITA RAMÓN DENISSE DEL PILAR, en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao.

2º. AUTORIZAR, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

3º. TRANSCRIBIR, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesada, para conocimiento y fines.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

PROVEÍDO N°614-2022-D-FCNM

Ref. : **OFICIO N° 02-2022-JET-EPM-FCNM**
DICTAMEN N° 02-2022-JET-FCNM
Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. ITA RAMÓN, Denisse del Pilar
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

JURADO EVALUADOR DE TESIS

(R. D. Nº 085-2022-D-FCNM)

Lima, 06 octubre 2022

OFICIO Nº 02-2022-JET-EPM-FCNM

Señor

Dr. Juan A. Méndez Velásquez
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Presente.-

De mi consideración:

Tengo el agrado de dirigirme a usted para expresarle un cordial saludo y en atención al Memorando Nº 051-2022-D-FCNM, remitir a su despacho el expediente con el Dictamen del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis titulada: "ANALISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD" presentado por la bachiller Ita Ramón Denisse Del Pilar.

Atentamente,

…………………………………..

Dr Julio César Nuñez Villa
Presidente de Jurado Evaluador de Tesis

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

06 de octubre 2022

DICTAMEN N°02-2022- JET-FCNM

El Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "ANALISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD" presentado por la bachiller Ita Ramón Denisse Del Pilar, designado con Resolución Decanal Nº 085-2022-D-FCNM, reunido en sesión virtual ordinaria del día miércoles 05 de octubre a las 21: 40 hrs., revisan cuidadosamente el Proyecto de Tesis presentado, en forma y fondo; por lo que el Jurado de Proyecto de Tesis toman el siguiente:

ACUERDO:

1 º **Aprobar** el proyecto de tesis titulado: "ANALISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD" presentado por la bachiller Ita Ramón Denisse Del Pilar.

2º Remitir al Señor Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática el presente dictamen, acompañado la versión virtual del expediente respectivo para que, según lo dispuesto por el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, se continúe con el trámite.

…………………………
Dr. Julio César Nuñez Villa
Evaluador de Tesis
PRESIDENTE

…………………………
Dr. Edinson Montoro Alegre
Jurado Evaluador de Tesis
VOCAL

…………………………
Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Jurado Evaluador de Tesis
SECRETARIO

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Jurado Evaluador de Tesis
SUPLENTE

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 002-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis
Presente.-

A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha	:	Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora	:	21:40
Enlace	:	https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

- ✓ Expediente de tesis "Analisis Cualitativo Del Modelo Generalizado De Redes Neuronales De Hopfield" del Bachiller Ita Ramón, Denisse Del Pilar.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 085-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 002-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Presente.-

A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 21:40
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

- ✓ Expediente de tesis "Analisis Cualitativo Del Modelo Generalizado De Redes Neuronales De Hopfield" del Bachiller Ita Ramón, Denisse Del Pilar.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 085-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

ASISTENCIA
(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 002-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CARGO
(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 002-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

"ANALISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD"

Autora:

Denisse del Pilar Ita Ramón

Asesor:

Mg. Absalón Castillo Valdivieso

Línea de investigación:

Análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales

Callao, 2022

PERÚ

DENISSE DEL PILAR ITA RAMÓN
BACHILLER

PROF.ABSALON CASTILLO VALDIVIESO
ASESOR

NFORMACIÓN BÁSICA

Facultad: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Unidad de investigación: Departamento de Matemática.

Título: Análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

Autora: Denisse del Pilar Ita Ramón.

ORCID: 0000-0001-7773-1141

Asesor: Mg. Absalón Castillo Valdivieso.

ORCID: 0000-0002-6083-9321

Lugar de ejecución: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Unidad de análisis: Sistemas dinámicos, redes neuronales aplicado en EDO.

Tipo de investigación: Básica.

Tema OCDE: 1.01.01 -Matemática Pura

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las redes neuronales artificiales se inspiraron en el funcionamiento del cerebro y los intentos de imitar ciertos sistemas biológicos. Como tales, las redes neuronales artificiales constituyen interconexiones masivas de elementos, cuyas entradas existen y consisten en sumas ponderadas apropiadas que se transfieren a las neuronas de salida.

Las neuronas están representadas por funciones apropiadas, llamadas funciones de activación; la primera red neuronal más conocida y aplicada por primera vez, es el perceptrón multicapa que utiliza el algoritmo de propagación hacia atrás para entrenar la red ; mientras que el ejemplo más popular es la red neuronal Hopfield que utiliza un método, para entrenar a la red la cual rige un estricto cumplimiento de las definiciones formales en la clasificación de redes neuronales artificiales de retroalimentación que se aplica generalmente a una sola capa. Al decir redes de retroalimentación nos referimos a redes completamente interconectadas. Derong Liu (2002).

Muchas de las redes neuronales que consideramos están dotadas de restricciones, tales redes constituyen clases importantes de sistemas dinámicos a gran escala con propiedades cualitativas interesantes. Derong Liu (2002).

En el presente trabajo se considerará un análisis sistemático de las redes neuronales artificiales de Hopfield que aborda las limitaciones al comportamiento cualitativo. Además, mostramos cuestiones relativas a la existencia y las propiedades cualitativas en dichas redes neuronales.

Para la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones de dichas ecuaciones en las redes antes mencionadas, se establecerán condiciones precisas que garanticen la existencia de equilibrios aislados brindando limites superiores para el numero de equilibrios asintóticamente estables. Derong Liu (2002)

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El análisis cualitativo y la síntesis de redes neuronales tienen diversas propiedades, atributos y limitaciones.

En la presente tesis, el problema radica en el análisis del comportamiento asintótico de las redes neuronales de Hopfield a partir del análisis cualitativo.

Asimismo, para las redes en estudio establecemos condiciones que garantizan la existencia de equilibrios aislados, que provean limites superiores para el número total de equilibrios asintóticamente estables.

Con esto pretendemos establecer resultados que nos permitan localizar asintóticamente todos los equilibrios y así determinar las propiedades de estabilidad local.

J.J. Hopfield (1984) más conocido por su invención de la red neuronal asociativa que ahora actualmente lo conocemos como red tipo Hopfield, describe que la red neuronal artificial está dada por una ecuación diferencial matricial que permita que la red sea dinámica.

La red neuronal de Hopfield está dada por: $\dot{x} = -Ax + Ty + I$

$$y = S\ (x)$$

donde $\dot{x}$ representa el cambio de estado de la red neuronal, $-Ax$ representa la polarización del estado de la red neuronal (estado de reposo), T es la interconexión neuronal, I consiste en el umbral de activación de la red neuronal teniendo como condición inicial a $y = S\ (x)$ que representa la función logística o llamada función sigmoide.

El resultado principal consiste en mostrar la generalización del modelo de Hopfield, el cual presenta un nuevo parámetro $H(x)$ que viene a ser la función amplificación que representa el estado de despolarización de la red neuronal llamado también potencial de acción que está dado por: $\dot{x} = -H(x)(-Tx + S(x) - I)$.En la presente investigación presentaremos dos teoremas que satisfacen el sistema de ecuaciones, los teoremas I y II, la existencia de soluciones y la convergencia de sus puntos de equilibrio.

1.2. Formulación del problema

- **Problema general**

¿Es posible realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?

- **Problemas específicos**

- ¿Es posible que existan soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?
- ¿Es posible que las soluciones del problema generalizado de Hopfield converjan a sus puntos de equilibrio?

1.3. Objetivos

- **Objetivo general**

Realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

- **Objetivos específicos**

- Demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.
- Demostrar que las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a sus puntos de equilibrio.

1.4. Justificación

El estudio y análisis cualitativo del modelo generalizado de Hopfield es un caso especial para una clase de redes neuronales, el cual considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas no lineales.

Este sistema de ecuaciones ordinarias utiliza un conjunto apropiado de supuestos, donde se muestra la generalización del modelo de Hopfield.

Las diferentes redes neuronales que se han considerado en la literatura se clasifican generalmente en dos categorías: redes neuronales de retroalimentación y redes neuronales dotadas de bucles de retroalimentación.

El ejemplo más cómodo y aplicado del primero es el perceptrón multicapa para el cual se usa el algoritmo de propagación hacia atrás para entrenar la red, mientras que el ejemplo más popular del segundo es la red neuronal Hopfield para lo cual se usa el método producto para entrenar la red.

Por consiguiente, se pretende mostrar que el sistema mencionado posee soluciones únicas que existen para todo tiempo. Además, es posible asociar dichas soluciones con una función de energía; por otro lado, se probará que hay un número de puntos de equilibrio finito, mostrando la dinámica estable del sistema.

1.5. Delimitantes de la investigación

Teórico

Los limitantes teóricos de nuestra investigación corresponden a las redes neuronales artificiales y el análisis del comportamiento asintótico de las redes tipo Hopfield.

Además de èste limitante, existe otras limitantes teóricas para el presente trabajo de tesis que consiste en que en el Perú no se encuentran trabajos de investigación respecto al tema de redes neuronales artificiales tipo Hopfield.

Por consiguiente, se afirma que no aplica para este tipo de proyecto.

Temporal

Nuestra investigación es de índole teórica y no aplica para este proyecto de investigación.

Espacial

La presente investigación no considera algún tipo de laboratorio físico, por ser de índole estrictamente teórico. No aplica para este proyecto.

II.MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: Internacional y nacional

Debido a la naturaleza del trabajo; solo se pudo encontrar antecedentes internacionales, las cuales serán explicadas a continuación:

- **Internacional**

Pérez, J. (2002) en su tesis doctoral titulada “modelos predictivos basados en redes neuronales recurrentes de tiempo discreto”, de la Universidad de Alicante (España), planteó que las redes neuronales recurrentes son sistemas dinámicos no lineales capaces de descubrir regularidades temporales en las secuencias procesadas y pueden aplicarse, a multitud de tareas de procesamiento de este tipo de secuencias. Esta tesis se centra en la aplicación de las redes neuronales recurrentes con la predicción del siguiente elemento de secuencias de naturaleza simbólica o numérica.

Sandoval, A. (2006) en su tesis doctoral titulada “Redes neuronales dinámicas con diferentes escalas de tiempo para identificación de sistemas no lineales”, del Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Técnico Nacional de Control Automático (México), planteó estudiar las redes neuronales de tipo Hopfield, para mostrar la efectividad de redes neuronales múltiples con escalas de tiempo, implementando sistemas no lineales típicos multiescalas de tiempo y un sistema electromecánico para verificar resultados teóricos.

Rodríguez, F. (2014) en su tesis “Identificación y control de sistemas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes adaptables”, de la Universidad de Nueva León-Facultad de Ciencias Matemáticas (España) presenta un nuevo campo de aplicación de las redes neuronales dinámicas para control no lineal robusto; desarrolla un análisis sistemático para la estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias de plantas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes, para el caso determinístico. A diferencia del control adaptable tradicional, en este trabajo se presenta una nueva forma de modelar en línea, plantas no lineales por medio de redes neuronales de pesos variables en el tiempo, con el objetivo que la planta siga a una señal de referencia dada. Para esto se obtienen leyes de control y leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, las cuales garantizan en conjunto que la planta siga dicha señal de referencia. La herramienta principal utilizada para este análisis está basada en la metodología de análisis de estabilidad de Lyapunov.

Es así como se puede observar que el presente trabajo marca una diferencia con relación a lo desarrollado en los diversos trabajos a nivel mundial siendo éste de alta relevancia para la comunidad matemática y mostrando un tema que no ha sido explorado con anterioridad.

2.2. Bases teóricas

La presente sección aborda los conceptos básicos necesarios de acuerdo al desarrollo del tema en mención, por tal motivo se usó resultados investigados por Derong Liu (2002), Cruz Sandoval (2006), Andrade Tepan (2013).

2.2.1. Introducción a las redes neuronales

Las redes neuronales (intentan simular sistemas biológicos) se componen de una interconexión de dispositivos, llamados neuronas, y entradas externas locales.

Las características de entrada / salida de una neurona se pueden modelar, por ejemplo, mediante una función sigmoide.

Las entradas a las neuronas consisten en sumas ponderadas de las salidas de las neuronas. Usualmente algunas características dinámicas están asociadas con cada neurona.

Inicialmente, la mayoría de los modelos populares de redes neuronales pueden implementarse mediante amplificadores operacionales, capacitores, resistencias y fuentes de voltaje o corriente, de igual manera las simulaciones de estas redes (procesadores en serie) también han recibido una gran atención.

2.2.2. Modelo de redes neuronales

En esta sección se considera principalmente la atención a las redes neuronales completamente interconectadas (también llamadas redes de retroalimentación). El término de red neuronal completamente interconectada se refiere al modelo de red para los cuales la salida de cada neurona puede conectarse a las entradas de todas las neuronas.

La clase de redes neuronales más importantes que no está completamente interconectada son redes de alimentación, donde los elementos neuronales se pueden separar en capas distintas.

En algunos casos, la entrada a la red afecta directamente a la primera capa, y está a la salida de la primera, la capa afecta a la segunda capa, y así sucesivamente. Por lo tanto, el flujo de la información en las redes de retroalimentación es unidireccional (y, en consecuencia, tales redes no son de retroalimentación respecto a las redes neuronales), se puede citar como ejemplo las redes neuronales que no están completamente interconectadas a las redes neuronales celulares en las que se permite que la salida de una neurona dada se conecte solo a algunas vecinas.

En 1943, Mc Culloch y Pits presentaron una red de unidades lógicas de umbral antiguo, llamada con este nombre porque dicha red fue capaz de asumir valores binarios 1 y -1. La evolución temporal de la salida de cada unidad en tal red describe la siguiente ecuación, donde T_{ij} y I_i son números reales

$$\begin{cases} v_i(k+1) = \operatorname{sgn}(u_i(k)) & ,1 \le i \le n \\ u_i(k) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} v_j(k) + I & ,1 \le i \le n \end{cases} \qquad (i)$$

La función signo $\operatorname{sgn}(u)$ está definido a ser igual a 1 cuando u es positivo y -1 cuando u es negativo., esto quiere decir,

$$\operatorname{sgn}(u_i(k)) = \begin{cases} 1 & ,u_i(k) > 0 \\ -1 & ,u_i(k) < 0 \end{cases} \qquad (ii)$$

u_i denota la entrada a la i-ésima neurona, v_i representa la salida de la i-ésima neurona, T_{ij} especifica la fuerza de interconexión entre la i-ésima neurona y la j-ésima neurona, I_i representa la entrada externa de la neurona i.

Cada neurona está representada por una función sigmoide.

Cuando $u_i(k) = 0$, entonces $v_i(k+1) = v_i(k)$.El orden de conmutación de esta red determina un proceso aleatorio.

En cualquier instante de tiempo, cada neurona (modelada por la función signo, sgn) tiene una equivalencia probable de evaluar su estado de acuerdo con (i).

Por lo tanto, el estado del sistema cambia asincrónicamente y la tasa media de cambio es la adecuada para cada neurona, esta falta de sincronismo se introduce para mejorar el modelado de sistemas biológicos.

Se nota que la red neuronal representada por (i) tiene n neuronas, que la interconexión de la j-ésima neurona a la i-ésima neurona tiene fuerza T_{ij}, y el término I_i representa un umbral de activación para la i-ésima neurona.

Mc.Culloch y Pitts demostraron que la red es capaz de resolver problemas lógicos y también notaron que los problemas difíciles se pueden resolver interconectando adecuadamente una red de procesos simples.

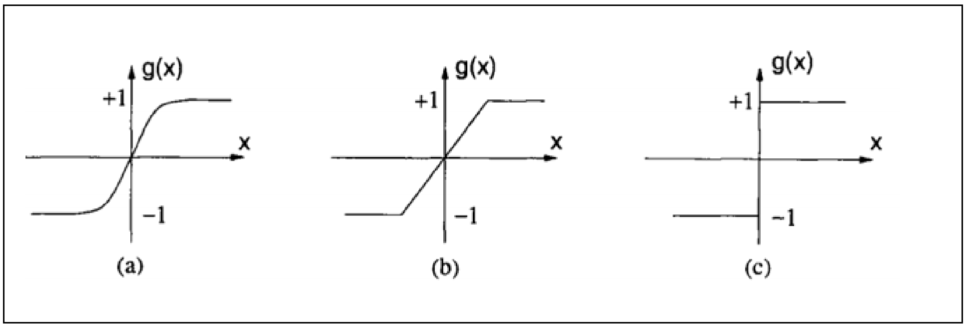
Se hace uso de las equivalentes sincrónicas de (i) descritas por las ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} v_i(k+1) = g(u_i(k)) & ,1 \le i \le n \\ u_i(k) = \sum_{j=1}^{n} Tijv_j(k) + I_i & ,1 \le i \le n \end{cases} \qquad (iii)$$

g es una función continua, monótonamente creciente llamada función sigmoide véase en la Imagen 1, parte (a) de la imagen de dicha función, g denota la función signo definida en (i). (vea la Imagen 1 parte (c)).

La principal diferencia entre los sistemas descritos por (i) y (iii) se encuentran en sus modos de operación.

Imagen 1. Características de entradas / salidas de la función sigmoide



Fuente: Elaboración propia.

La Imagen 1: muestra en (a) las características de entrada y salida de la función sigmoide, (b) las características de entrada y salida lineales saturadas, (c) características de entrada y salida de limites discontinuos.

En la ecuación (i) se observa que las neuronas pueden cambiar de forma sincronizada (imitar sistemas biológicos), mientras que en (iii) las neuronas evalúan y cambian sus estados sincrónicamente.

2.2.3. Modelo de red neuronal de Hopfield

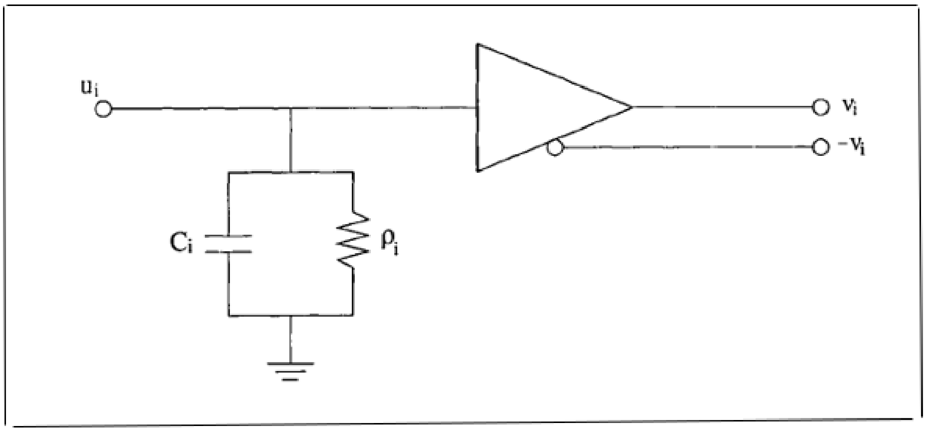
Hopfield considera los circuitos electrónicos de tipo dado en la Imagen 2 y 3 como modelo para sistemas de redes neuronales. En tales circuitos, hay n amplificadores no lineales idénticos. Si no consideramos la capacitancia de entrada y la resistencia de entrada, se supone que la relación entrada-salida del i-ésimo amplificador viene dado por la expresión

$$v_i = g_i(\lambda u_i) = \tfrac{2}{\pi}\tan^{-1}(\frac{\pi}{2}\lambda u_i) \qquad (*)$$

donde u_i denota la entrada, v_i representa la salida, y el parámetro λ es la ganancia de los amplificadores no lineales. Se supone que el tiempo de respuesta de cada amplificador es despreciable en comparación con la constante de tiempo determinada por la capacitancia de entrada y la resistencia de entrada.

El i-ésimo amplificador no lineal se puede ilustrar como en la Imagen 2.

Imagen 2. La i-ésima célula neuronal en el modelo de Hopfield.



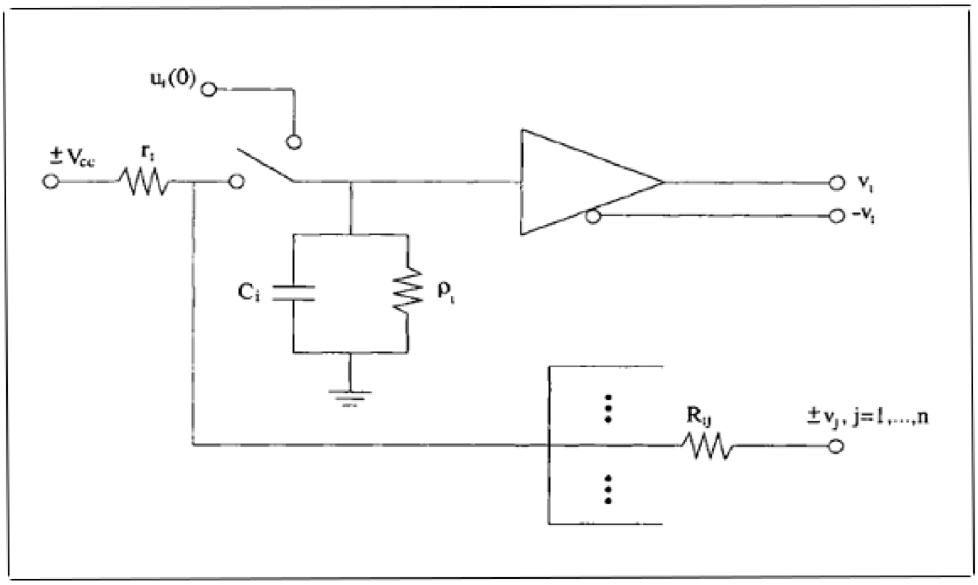
Fuente: Elaborado por Derong Liu (2002).

Tener en cuenta, en el caso de cada amplificador no lineal, se toman las disposiciones necesarias para que el amplificador también pueda servir como un inversor para hacer posibles cambios de signo en las señales en el amplificador de salida (ver Imagen 2).

La expresión $(*)$ es un ejemplo de la función sigmoide. Específicamente, diremos que la función $g(\cdot)$ es una función sigmoide , si $g:\Re \to (-1,1)$ [es decir, g se distribuye $\Re = (-\infty,\infty)$ en $(-1,1)$] así $g(0)=0$, si $g(\cdot)$ es suave [es decir, $g(\cdot)$ es continua diferenciable], siendo $dg(\sigma)/d\sigma \triangleq g'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma \in \Re$, sí $\lim_{\sigma\to\infty} g(\sigma) = 1$ y $\lim_{\sigma\to-\infty} g(\sigma) = -1$.

En el circuito de la Imagen 3, las neuronas (representadas por amplificadores) están conectadas entre sí, como se muestra, donde $\pm V_{cc}/r_i$ es la corriente de entrada a la i-ésima neurona, $u_i(0)$ es la condición inicial para la i-ésima neurona, y R_{ij} denota la resistencia que conecta la salida de la j-ésima neurona a la entrada de la i-ésima neurona.

Imagen 3. Implementación del modelo de red neuronal de Hopfield.



Fuente: Elaborado por Derong Liu (2002).

Se cita la ley de corriente de Kirchoff en el modo que cada entrada del amplificador da como resultado la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{C_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_{ij}}\left(\pm v_j\right) - \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{r_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_{ij}}\right)u_i + \frac{\pm V_{cc}}{r_i}\right] \quad , \quad i = 1,\cdots,n \qquad (**)$$

si en el circuito anterior tenemos

$$t_{ij} = \begin{cases} +1/R_{ij} & , si\, R_{ij} \quad esta \quad conectado \quad a \quad v_j \\ -1/R_{ij} & , si\, R_{ij} \quad esta \quad conectado \quad a \quad -v_j \end{cases}$$

$$\frac{1}{R_{ij}} = \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{r_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_{ij}} \qquad \text{y} \qquad w_i = \frac{\pm V_{cc}}{r_i}$$

Luego de $(**)$, se asume la forma

$$\begin{cases} C_i\left(du_i / dt\right) = -u_i / R_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} v_j + w_j \\ v_i = g\left(\lambda u_i\right) \quad , i = 1,\cdots,n \end{cases} \qquad (***)$$

donde g se da en $(*)$, esta es la ecuación dada por Hopfield.

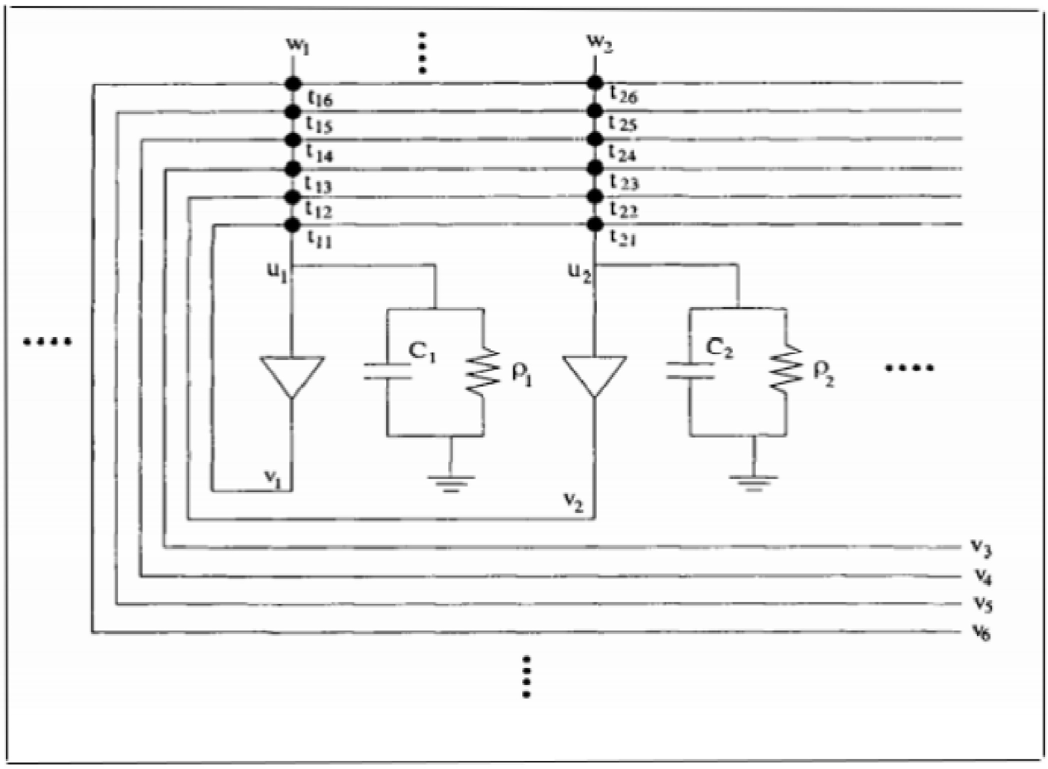
Se observa la representación simbólica usual del modelo de redes neuronales que muestra la Imagen 4, donde los puntos indican interconexiones de neuronas. En comparación con otros modelos, el modelo de red neuronal de Hopfield se implementa fácilmente mediante circuitos electrónicos que han sido usados en varias aplicaciones.

La representación de la red neuronal de Hopfield dada en $(***)$, se tiene $u=(u_1,\cdots,u_n)^T=(x_1,\cdots,x_n)^T=x$, $a_i=1/(R_iC_i)$, $A=diag\left[a_1,\cdots,a_n\right]$, $I_i=w_i/C_i$ $I=(I_1,\cdots,I_n)^T$, $T_{ij}=t_{ij}/C_i$, $T=\left[T_{ij}\right]$, $y_i=g_i(\lambda u_i)/C_i=s_i(x_i)=y=(y_1,\cdots,y_n)^T$,y $S(x)=(s_1(x_1),\cdots,s_n(x_n))^T$ se pueden representar en $(***)$ equivalentemente por

$$\begin{cases}\dot{x}=-Ax+Ty+I\\ \quad y=S(x)\end{cases}$$

Esta expresión, o otras muy similares, se utilizan con mucha frecuencia en la literatura para representar el modelo de red neuronal de Hopfield.

Imagen 4. Representación simbólica del modelo red neuronal de Hopfield



Fuente: Elaborado por Derong Liu (2002)

2.2.4. Resultados importantes sobre el análisis cualitativo

En esta sección abordaremos tres partes: Primero, estableceremos algunas notaciones, proporcionaremos algunos resultados preliminares esenciales sobre ecuaciones diferenciales y teoría de estabilidad.

A) Notación

- Sea V y W conjuntos arbitrarios entonces $V \cup W$,$V - W$ y $V \times W$, denota la unión, intersección, diferencia y producto cartesiano de V y W, respectivamente. Si V es un subconjunto de W escribimos $V \subset W$ y si x es un elemento de V , escribimos $x \in V$.
- Si f es una función de V en W, escribimos $f: V \to W$ y sea $f(U) = \{f(x) \in W : x \in U\}$ para $U \subset V$, y $f^{-1}(y) = \{x \in V : f(x) = y\}$ para $y \in W$
- Sean los conjuntos ϕ , $\Re$ y sea $\Re^+ = [0, \infty\rangle$ .Si $V_1, ..., V_n$ son los n conjuntos arbitrarios, su producto cartesiano se denota por $\prod_{i=1}^{n} V_i = V_1 \times \cdots \times V_n$.

  Si en particular, $V = V_1 = \cdots = V_n$ escribimos $\prod_{i=1}^{n} V_i = V^n$.
- Sea $\Re^n$ un n- espacio real. Si $x \in \Re^n$, entonces $x^T = (x_1, \cdots, x_n)$ denota la transpuesta de x. Cuando se usa una norma para $x \in \Re^n$, pensamos $|x| = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}$. Si $x \in \Re^n$ y $Y \subset \Re^n$, entonces $x \perp Y$ significa que $x^T \cdot y = 0$ para todo $y \in Y$.
- Si $V \subset \Re^n$, entonces $\overline{V}, V^\circ$ y ∂V representa la clausura, interior, frontera de V en $\Re^n$, respectivamente.

  También, sea $B(\tilde{x}, r) = \{x \in \Re^n : |x - \tilde{x}| < r\}$ para todo $\tilde{x} \in \Re^n$ y $r > 0$.
- Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz arbitraria, entonces A^T se denota la transpuesta de A y la norma de A se define como $\|A\| = \sup_{|x|<1} \{|Ax|\}$. Si A es una matriz simétrica, para $A > 0$ significa que A es semidefinida positiva.
- Si $E_1, \cdots, E_n$ son los n-espacios vectoriales en $\Re$, $L(E_1, \cdots, E_n, \Re)$ denota el

conjunto de mapeos de continuidad multilineal de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ a $\Re$. En particular, $E_1 = \cdots = E_n = E$ escribimos $L(E_1,\cdots,E_n;\Re) = L^n(E;\Re)$.

- Para una función $f : V \to W$, donde $V \subset \Re^n, W \subset \Re$, la derivada del k-ésimo orden es denotado por $D^k f : V \to L^k(\Re^n;\Re)$, si esto existe.
- Una función $F : V \to W$, donde $V \subset \Re^n, W \subset \Re^m$ se dice que es una clase C^k, si para componente de F, la derivada de k-ésimo orden existe y es continua.
- Dado una C^2, una función $g : V \to \Re$ donde $V \subset \Re^n$, denotamos la gradiente de g para $\nabla g(x) = (\partial g_1(x),\cdots,\partial g_n(x))^T = Dg(x,\cdot)$ y denotamos la matriz jacobiana de g para $J_g(x) = [\partial^2 g(x)/\partial x_i \partial x_j] = D^2 g(x,\cdot,\cdot)$, para un elemento $\tilde{x} \in V$ es llamado punto crítico de g si hay una vecindad abierta U de $\tilde{x}$ tal que para todo $x \in U, g(x) \geq g(\tilde{x})$.

B) Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideramos sistemas de primer orden, ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de la forma:

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $x = (x_1,\cdots,x_n)^T \in G$, G es no vacío , subconjunto abierto conectado en $\Re^n$ $t \in \Re$, $\dot{x} = dx/dt$ y f es una función de clase C^1 de G en $\Re^n$.

Lema 1

Para cada $\tilde{x} \in G$, hay una única solución no continua de (E) dado por

$$\varphi(\cdot,0,\tilde{x}) : [0,\tilde{t}) \to G$$

con $\varphi(0,0,\tilde{x}) = \tilde{x}$. Esta solución es no continua en el sentido que si hay otra solución de (E)

$$\varphi_1(\cdot,0,\tilde{x}) : [0,\tilde{t}_1) \to G$$

con $\varphi_1(0,0,\tilde{x}) = \tilde{x}$, tenemos $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t}$ y $\varphi_1 = \varphi$ en $[0,\tilde{t})$.

Llamamos la función $\varphi(\cdot,0,\tilde{x})$ la solución de (E) a partir de $\tilde{x}$.Por tanto, escribimos $\varphi(t,\tilde{x})$ o $\varphi(t)$ en lugar de $\varphi(t,0,\tilde{x})$ cuando las condiciones iniciales son $(0,\tilde{x})$.

Lema 2

Suponemos que G es acotado entonces para alguna solución $\varphi(\cdot,\tilde{x}):[0,\tilde{t}) \to G$, cada $\varphi(t) \to \partial G$ cuando $t \to \tilde{t}$ o $t = +\infty$.

Una solución constante $\varphi(t,\tilde{x}) \equiv \tilde{x}$ se dice que es un equilibrio de (E). Equivalentemente, algún punto $\tilde{x} \in G$ tal que $f(\tilde{x}) = 0$ es un equilibrio de (E).

Lema 3

Para una solución de no equilibrio $\varphi(\cdot,\tilde{x}):[0,\tilde{t}) \to G$, $f(\varphi(t,\tilde{x})) \neq 0$ para algún $0 \leq t < \tilde{t}$ .La prueba de este lema es una consecuencia directa de la unicidad de soluciones de (E).

C) Estabilidad de un equilibrio

Resumiremos algunos conceptos y resultados de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Un equilibrio $\varphi(t) \equiv \tilde{x}$ de (E) se dice que es aislado si hay un $r > 0$ tal que para algún $x \in B(\tilde{x},r) - \{x\}$, $f(x) \neq 0$.

Sea $\tilde{x}$ un equilibrio aislado de (E),

para las siguientes definiciones, asumimos que las soluciones $\varphi(\cdot,0,\tilde{x})$ para (E) ,existe para todo $t \geq 0$ cuando $|x - \tilde{x}| < h$ para algún $h > 0$.

a) $\tilde{x}$ se dice que es estable si para algún $\varepsilon > 0 (\varepsilon < h)$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\varphi(t,0,x) - \tilde{x}| < \varepsilon$, para todo $t \in [0,+\infty)$ para cualquier $|x - \tilde{x}| < \delta$.

b) $\tilde{x}$ se dice que es asintóticamente estable y si esto es estable $\eta > 0 (\eta < h)$ tal que $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t,0,x) - \tilde{x}| = 0$ para cualquier $|x - \tilde{x}| < \eta$.

c) $\tilde{x}$ se dice que es inestable si no es estable.

Dada una función g de clase C^1, $g : G \to \Re$ definimos la función $D_{(E)}g : G \to \Re$ para $D_{(E)}g(x) = \nabla g(x)^T f(x)$ y llamamos $D_{(E)}g$ la derivada de g con respecto a t a lo largo de las soluciones de (E).

Una $\psi(s)$ función continua $\psi : \Re^+ \to \Re^+$ se dice que pertenece a la clase k (es decir, $\psi \in k$) si $\psi(0) = 0$ y $\psi(s)$ es monótonamente creciente en s.

Lema 4

El equilibrio $x = 0$ de (E) es asintóticamente estable si existe una C^1 función $v: B(r) \to \Re$ para algún $r > 0 (r < h)$ y las funciones $\psi_1, \psi_2 \in k$ tal que $v(0) = 0$, $v(x) \geq \psi_1(|x|)$ y $D_{(E)}v(x) \leq -\psi_2(|x|)$ para todo $x \in B(r)$.

El resultado anterior establece que el equilibrio $x = 0$ de (E) es asintóticamente estable si existe una función definida positiva o cuya derivada en el tiempo es evaluada a lo largo de las soluciones de (E) definida negativa.

Lema 5

Si una solución $\varphi(t, x_0)$ de (E) permanece en un conjunto compacto para $0 \leq t < \infty$ entonces su conjunto límite $\Omega(\varphi)$ es no vacío, compacto y un conjunto invariante con respecto a (E). Además, $\varphi(t, x_0)$ se aproxima al conjunto $\Omega(\varphi)$ cuando $t \to \infty$ [es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe t' tal que para cada $t > t'$ existe un punto $a \in \Omega(\varphi)$ (posiblemente dependiente de t) tal que $|\varphi(t, x_0) - a| < \varepsilon$].

Lema 6

Sea v una función continua diferenciable definida en un dominio $G \subset \Re^n$ que contiene al origen y dado $D_{(E)}v(x) \leq 0$ para todo $x \in G$.

Sea $x_0 \in G$ y sea $\varphi(t, x_0)$ es una solución acotada de (E) cuya trayectoria se encuentra en G, para todo $t \geq 0$ y sea un conjunto $\Omega(\varphi)$ de $\varphi(t, x_0)$ en G entonces $D_{(E)}v = 0$ en todos los puntos de $\Omega(\varphi)$ (recordar que la trayectoria de una solución φ de (E) es la proyección de un lugar geométrico de los puntos en t-espacio x determinado por $\varphi(t)$ para todo $t \geq 0$ en el espacio x).

2.3. Marco conceptual

2.3.1. Modelo biológico.

Una neurona tiene tres partes principales:

- **Ramas de extensión o dendritas:** Reciben estímulos de entrada.
- **Cuerpo de la neurona**: Procesa estímulos de entrada.
- **Axón:** Emite estímulos de salida a las dendritas de otras neuronas.

Una neurona recibe estímulos de entrada mediante las dendritas, estos estímulos son procesados en el cuerpo, para posteriormente emitir un estímulo de salida a través del axón.

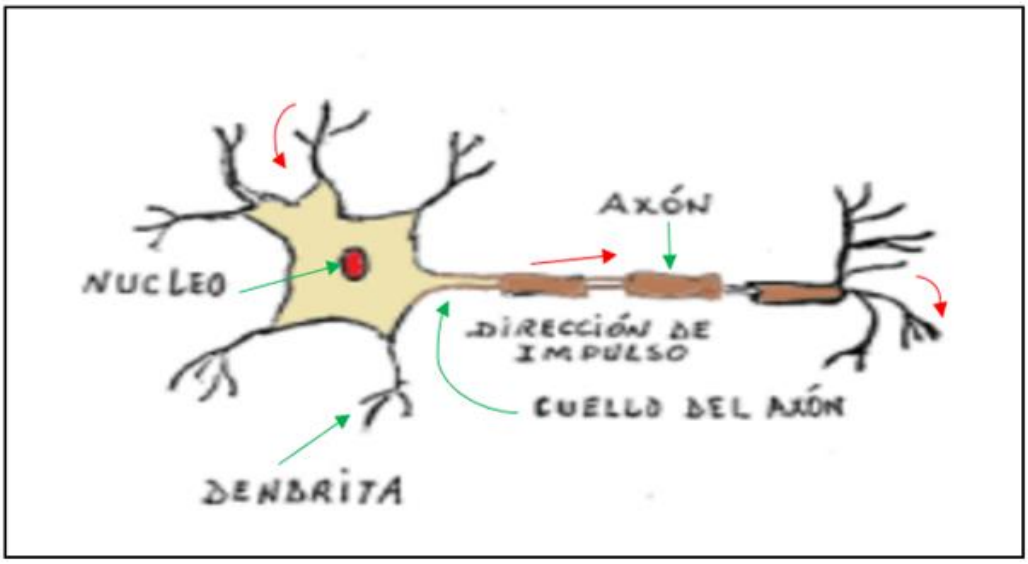
La neurona utiliza dos tipos de señales: las que se generan y transportan a través del axón son impulsos eléctricos. La señal transmitida entre los terminales axónicos y las dendritas de otra neurona es de origen químico. Esta conexión entre el axón de una neurona y las dendritas de otra se llama **sinapsis;** y se da gracias a que existen dos tipos de neuronas: aquella que suministra el impulso se llama **presináptica**; y las que reciben el impulso son conocidas como **postsinápticas**.

Todas las neuronas siguen un proceso similar para conducir la información, "ésta viaja a lo largo de los axones en breves impulsos eléctricos, denominados potenciales de acción, que alcanzan una amplitud máxima de unos 100mv y duran 1ms". La neurona que se encuentra en reposo "mantiene un potencial eléctrico de -70mv".

Los potenciales de acción no pueden saltar de una neurona a otra; para que sea posible la comunicación entre neuronas se necesita transmisores químicos que son liberados en la sinapsis. Cuando un potencial de acción llega al terminal de un axón se libera transmisores que son alojados en una hendidura muy pequeña que separa la célula presináptica de la postsináptica; durante este proceso son liberados también neurotransmisores "que se enlazan con receptores postsinápticos", lo que da origen a la comunicación entre dos neuronas.

Las redes neuronales artificiales tratan de imitar la funcionabilidad de un cerebro biológico, aunque el sistema artificial no alcanza la complejidad del mismo.

Imagen 3: Representación de una neurona biológica.



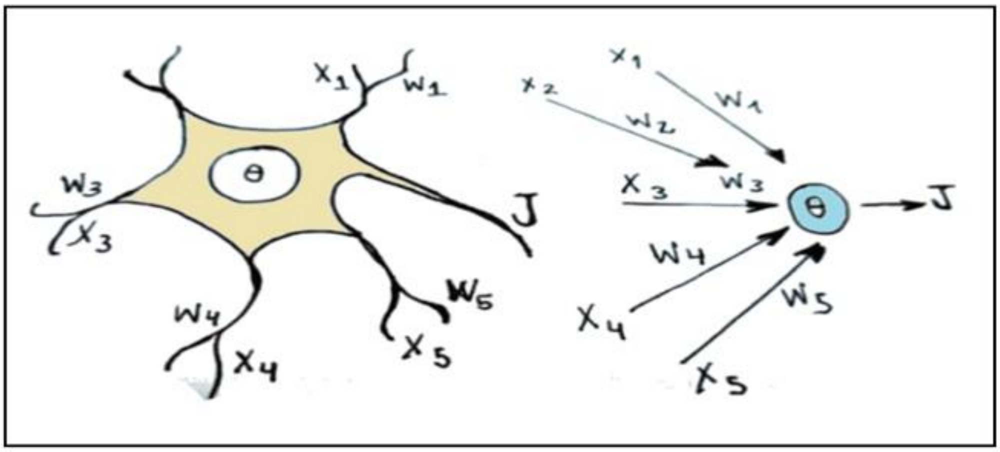
Fuente: Elaboracion propia.

Como observamos en la ilustración posterior, existen algunas analogías entre las redes neuronales artificiales y las redes neuronales biológicas, estas son:

- Las entradas X_i representan las señales que provienen de otras neuronas y que son capturadas por las dendritas.
- Los pesos W_i son la intensidad de la sinapsis que conecta dos neuronas; tanto X_i como W_i son valores reales.
- θ es la función umbral que la neurona debe sobrepasar para activarse; este proceso ocurre biológicamente en el cuerpo de la célula.
- Las señales de entrada a una neurona artificial $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables continuas.
- Cada señal de entrada pasa a través de una ganancia o peso.
- Los pesos pueden ser positivos (excitatorios), o negativos (inhibitorios).

El nodo sumatorio acumula todas las señales de entradas multiplicadas por los pesos o ponderadas y las transfiere a la salida a través de una función umbral o función de transferencia.

Imagen 4: Representación de la neurona biológica a la neurona artificial.



Fuente: Elaboracion propia.

2.3.2. Historia de las redes neuronales

A lo largo de la historia se ha tratado de construir máquinas que puedan realizar tareas con cierta inteligencia; su funcionamiento se ha basado en distintos procesos que realiza el ser humano, por ejemplo, las redes neuronales artificiales tratan de emular a la neurona biológica.

- ❖ El primero en estudiar el cerebro como una forma de ver el mundo de la computación fue Alan Turing en el año 1936.
- ❖ En 1943, Warren McCulloch, un neurofisiólogo, y Walter Pitts, un matemático, dieron los primeros fundamentos de la computación neuronal, explicaron la posible forma de trabajar de las neuronas y modelaron una red neuronal simple mediante circuitos eléctricos.
- ❖ Donal Hebb en 1949 fue el primero en explicar los procesos del aprendizaje, desde un punto de vista psicológico, desarrollando una regla de como el aprendizaje ocurría. Estos trabajos formaron las bases de la teoría de redes neuronales artificiales.

- Entre los años 1950 y 1956, Karl Lashley la información no era almacenada en forma centralizada en el cerebro, sino que era distribuida encima de él. El Congreso de Dartmouth se conoce como el inicio de la inteligencia artificial.
- Frank Rosenblatt en 1957, comenzó el desarrollo del Perceptrón, la red neuronal más antigua que se conoce, es usado actualmente en el reconocimiento de patrones.
- En 1960, Bernard Widrow y Marcial Hoff, desarrollaron la red neuronal ADALINE, (Adaptative Linear Elements), el primer modelo que fue utilizado para resolver un problema real: filtros adaptativos para eliminar ecos en las líneas telefónicas.
- Stephen Grossberg, en 1967, desarrolló la red neuronal Avalancha, que se utilizó para actividades como reconocimiento continuo del habla.
- Marvin Minsky y Seymour Papert en 1967, demostraron que el Perceptrón era una red muy débil pues no podía resolver problemas sencillos como el aprendizaje de una función no-lineal.
- Sin embargo, los estudios sobre redes neuronales artificiales continuaron, como es el caso de James Anderson que desarrolló un modelo lineal llamado Asociador Lineal.
- En 1974 Paul Werbos, desarrolló la idea básica del algoritmo Backpropagation; sin embargo, su estudio quedó totalmente claro en 1985.
- Stephen Grossberg en 1977, desarrolló la teoría de resonancia adaptada, es una arquitectura diferente que simula otras habilidades del cerebro como memoria a largo y corto plazo. En este mismo año Teuvo Kohonen desarrolló un modelo similar al de Anderson, pero de manera independiente.
- En 1980 Kunihiko Fukushima, desarrolló un modelo neuronal para el reconocimiento de patrones visuales.
- Desde 1985, el panorama mejoró en cuanto a la investigación y desarrollo de una red; John Hopfield con su libro “Computación neuronal de decisiones en problemas de optimización”, dio paso al renacimiento de las redes neuronales.

2.3.3. Características de una red neuronal

Las redes neuronales artificiales se caracterizan de acuerdo a cuatro aspectos principales: topología, el mecanismo de aprendizaje, tipo de asociación realizada entre la información de entrada y salida, y la forma de representación de esta información.

Topología: Hace referencia a la organización y disposición de las neuronas en red, formando agrupaciones llamadas capas. Los parámetros fundamentales son: "el número de capas, el número de neuronas por capa, el grado de conectividad y el tipo de conexiones entre neuronas". Este último se utiliza para conocer si las redes son de propagación hacia adelante, Feedforward; o hacia atrás, Backpropagation; el número de capas permite saber si son mono capa o multicapa.

Mecanismo de aprendizaje: "El aprendizaje es el proceso por el cual una red neuronal modifica sus pesos en respuesta a una información de entrada." Durante este proceso los pesos de las conexiones de la red se modifican, cuando estos permanecen estables quiere decir que la red aprendió.

Existen diferentes mecanismos de aprendizaje que le permiten a la red ir modificando sus pesos de acuerdo a una salida deseada; o interpretar de diferente manera las salidas que la red genere.

Tipo de asociación realizada entre la información de entrada y salida: La asociación entre la información de entrada y salida se refiere a los datos que la red aprende, y asocia las entradas con una salida correspondiente.

Existen dos formas de realizar esta asociación:

Heteroasociación: "La red aprende parejas de datos $[(A_1, B)_1, ..., (A_n, B_n)]$, cuando se presenta una entrada A_i la red deberá responder generando la correspondiente salida B_i".

Auto asociación: "La red aprende ciertas informaciones $A_1, A_2 ..., A_n$ de tal manera que cuando se le presenta una información de entrada realizará una auto correlación, respondiendo con uno de los datos almacenados, el más parecido al dato de la entrada".

Forma de representación de la información: Los datos de entrada y salida de una red neuronal pueden ser representados de maneras distintas: "pueden ser analógicos, cuando esto ocurre, las funciones de activación de las neuronas son continuas, de tipo lineal o sigmoide". Otras redes tienen como datos de entrada valores discretos, entonces la función de activación son de tipo escalón. También existen redes híbridas, donde las entradas son continuas y las salidas discretas.

2.4. Definiciones de términos básicos

1. Redes de Hopfield

Fue propuesta en 1982 por el físico John Hopfield. Se basa fundamentalmente en estos aspectos novedosos, que se menciona:

- Planteamiento de una memoria asociativa, es decir permite recuperar patrones a partir de información incompleta.
- Todas las neuronas están conectadas con todas las demás.

La red de Hopfield basa su funcionamiento en almacenar información a manera de memoria asociativa. Como la memoria asociativa parte de un estado inicial llamado información de partida, después se deja evolucionar al sistema hasta que llegue a un estado estable, siendo este estado estable el patrón que más se parece a la información inicial. Se debe mencionar que el patrón inicial puede ser una versión deteriorada o incompleta del patrón que se desea obtener.

De los patrones almacenados inicialmente, la red encontrará aquel que más se parezca al presentado en la entrada planteada. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

2. La red neuronal artificial

Está compuesta por un conjunto de neuronas artificiales, dispositivos simples de cálculo que, a partir de un vector de entrada, ya sea del mundo exterior o bien a

partir de estímulos recibidos de otras neuronas generan una respuesta única.
Se puede distinguir tres tipos de neuronas.

- **Neuronas de entrada:** reciben señales del entorno, ya sea de otras partes del sistema o de sensores.
- **Neuronas de salida:** emiten una salida fuera del sistema una vez que ha finalizado el tratamiento de la información.
- **Neuronas ocultas:** reciben estímulos y emiten salidas dentro del sistema, es decir no tienen ningún contacto con el exterior; son las encargadas de realizar el procesamiento de la información. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

3. Estado de activación: Es necesario conocer los estados del sistema en un tiempo t, esto se especifica mediante un vector de N números reales, A(t), que indica el estado de activación del conjunto de neuronas. Cada elemento del vector representa el estado de activación de una unidad en un tiempo t. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

4. Entradas a la neurona

Las variables del exterior que se presenten a la neurona de entrada pueden ser de distinto tipo, dependiendo del tipo de red y la tarea que se vaya a realizar, tenemos:

Binarias: Cuando tienen dos valores.

Continuas: Cuando la variable toma valores en un intervalo numérico. Las neuronas que se encuentran después de la capa de entrada reciben como inputs las salidas que generan las capas previas con un valor de peso que indica su importancia; estas salidas pueden ser también binarias o continuas. Cada conexión entre la neurona i y la neurona j es llamada sinapsis y está ponderada por un peso. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013)

5. Función de propagación

La función de propagación nos indica el procedimiento que se debe seguir para combinar los valores de entrada y los pesos de las conexiones que llegan a una neurona. Todos los pesos se suelen agrupar en una matriz W, indicando la influencia que tiene la neurona i sobre la neurona j; este conjunto de pesos puede ser positivo, negativo o nulo. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013)

6. Función identidad o función lineal: es equivalente a no aplicar función de salida y es muy poco utilizada. La salida es igual a su entrada. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

7. Función sigmoide: Cuando se requiere una salida de información analógica, esta función es la más apropiada. Los valores de entrada pueden variar entre más y menos infinito, y devuelve como salida valores entre 0 y 1. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

8. Ecuación diferencial ordinaria autónoma de primer orden: es una ecuación de la forma $y' = F(y)$, donde $F(y)$ es una función dada continua.

Nota: Si en vez de usar la notación $y = y(x)$ para las soluciones, usamos la notación $x = x(t)$, la ecuación diferencial autónoma de 1er. orden es $\dot{x} = F(x)$ (recordemos que cuando la variable independiente se denota con t, la derivada respecto de t se denota con un punto, en vez de prima). (Catsigeras, 2013)

9.Estabilidad según Lyapunov: las funciones de Lyapunov son muy utilizadas en problemas de estabilidad que se estudian en los sistemas dinámicos, son funciones que básicamente nos demuestran la estabilidad de cierto punto fijo en un sistema dinámico o en las ecuaciones diferenciales autónomas, estas podrían probar la estabilidad de un punto de equilibrio cualquiera son llamadas candidatas a funciones de Lyapunov.(Preliminares, 2021).

10.Principio de invariancia: cuando no es posible verificar si un punto de equilibrio es asintóticamente estable por medio de una función de Lyapunov, pero de esta se obtiene que el punto es estable, es decir podemos utilizar el teorema de invariancia de LaSalle para verificar si el punto es asintóticamente estable. (Preliminares, 2021).

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

- **Hipótesis general**

Existe un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

- **Hipótesis específicas**

- Existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.
- Las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a los puntos de equilibrio.

3.1.1 Operacionalización de variables

Definición conceptual

Consideraremos las siguientes variables:

Variable Dependiente (D)

- Modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

Es un modelo especial de una clase de redes neuronales donde se incluye la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales que describen los equilibrios de la red y los equilibrios asintóticamente estables abordando las propiedades de estabilidad global de las redes neuronales.

Variable Independiente (I)

- Análisis cualitativo.

Es el estudio que se le hace a las ecuaciones diferenciales ordinarias para analizar su comportamiento a largo plazo a partir de la existencia de estabilidades y no estabilidades de los puntos de equilibrio.

Procedemos a medir con precisión las variables de acuerdo a las dimensiones que presentan, las mismas que darán cohesión y congruencia a las variables.

VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES	METODO	TECNICA
(D) Modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	Matriz de interconexiones neuronales. Función de amplificación. Matriz de neuronas	Matriz simétrica. Matriz simétrica definida positiva. Función sigmoide	Método científico con enfoque cualitativo.	Documentos cualitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación.
(I) Análisis cualitativo	Puntos de equilibrio. Función de energía. Análisis asintótico	Análisis de los puntos críticos. Jacobiano asociado a la función de energía. Convergencia de las soluciones.	Método científico con enfoque cualitativo.	Documentos cualitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño metodológico.

La investigación desarrollada presenta un diseño no experimental con un nivel de investigación descriptivo, en la cual se expondrá inicialmente una base teórica suficiente para la buena comprensión sobre las redes neuronales de Hopfield y además los conceptos biológicos necesarios para facilitar la comprensión del sistema de redes posteriormente como resultado principal de nuestra investigación se hará un análisis cualitativo a partir de encontrar los puntos de equilibrio del sistema de redes neuronales de Hopfield para su análisis asintótico a posteriori.

Tipo de investigación.

El presente trabajo que se desarrolla es de tipo básica fundamental; con un enfoque cuantitativo, utiliza las teorías existentes tratando de ser lo más exhaustivo posible y así generar nuevos conocimientos o criterios con el fin de que sirva como una motivación en investigaciones posteriores.

4.2. Método de investigación.

Por la naturaleza de la investigación el método a utilizarse es básico teórico.

En el presente proyecto de investigación, realizamos un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield, teniendo como objetivos específicos de demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield y demostrar las soluciones del problema generalizado de Hopfield que convergen a sus puntos de equilibrio; ya que se consiguió gracias a dos Teoremas I y II (existencia de soluciones, convergencia de soluciones).

Ya que permitió encontrar los puntos de equilibrio y mostrar la estabilidad de éstos que es un análisis cualitativo del modelo en estudio.

4.3. Población y muestra.

El presente proyecto comprende un estudio que solamente utiliza referencias teóricas, de modo que, población y muestra no aplica para este caso.

4.4. Lugar de estudio.

Por la naturaleza de la investigación, el correspondiente lugar de estudio fue en el laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Para la realización y desarrollo del proyecto de investigación no aplica para este caso.

4.6. Análisis y procesamiento de datos.

Por la característica del trabajo, no se necesita procedimiento de recolección de datos.

4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente proyecto de investigación está cumpliendo con los requisitos de la directiva actual N° 004-2022-R, cuyos criterios es delimitar el problema, relación de variables, formular como pregunta, tratar un problema y sus elementos que son los objetivos, justificación del estudio, viabilidad del estudio que implica alcances del estudio y consecuencias, nuevas perspectivas a estudiar y así contribuir con la presente investigación a la comunidad matemática.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

Para la realización y desarrollo del proyecto de investigación no aplica para este caso.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto de investigación

V.CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

Fecha de Inicio: 3/05/2021
Fecha de término: 3/11/2022

ACTIVIDADES	INICIO	FINAL	DUR. (Semanas)	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Capacitación Teórica	**3/05/2021**	23/05/2021	**3**																
Componente 1: Primer objetivo específico: Demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield. Se usará el Teorema I (EXISTENCIA DE SOLUCIONES), el cual se aprecia en el proyecto de investigación.	**24/05/2021**	20/06/2021	**4**																
Componente 2: Segundo objetivo específico: Demostrar que las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a sus puntos de equilibrio. Se usará el Teorema II (CONVERGENCIA DE SOLUCIONES), el cual se aprecia en el presente proyecto.	**21/06/2021**	18/07/2021	**4**																
Análisis y discusión de resultados	**19/07/2021**	15/08/2021	**3**																
Digitalización y defensa de tesis	**16/08/2021**	**3/11/2022**	**2**																

LEYENDA

- Controles y revisiones por asesor
- Clases, revisiones y presentaciones de avance

VI. PRESUPUESTO

El presupuesto para la realización del proyecto comprende el siguiente gasto:

Especificación	(%)	Costos S/.
Material de escritorio	17,7	800.00
Accesorios	11,1	500.00
Servicios de internet	13,3	600.00
Referencias	6,67	300.00
Fotocopias y espiralados	13,3	600.00
Tipeo de impresión	6,67	300.00
Papel de impresión	4,44	200.00
Refrigerio	11,1	500.00
Gastos de transporte	15,56	700.00
TOTAL	**100**	**4 500.00**

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Catsigeras, E. (17 de noviembre de 2013). Obtenido de Ecuaciones diferenciales complemento sobre estabilidad: https://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/NotasEnsenanza/Calcu2EcDifComplEstabilidad.pdf

Derong, Liu (2002). *Qualitative analysis and synthesis of recurrent neural networks.* University of Notre Dame, U.S.A.

Hopfield, J.J. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons.* Proceedings of the National Academy of Sciences. U.S.A (1984).

Hopfield, J.J., D.W. Tank, *"Neural "computation of decisions in optimization problems*. Biological cybernetics (1985).

Hopfield, J.J., *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities.* Proceedings of the National Academy of Sciences.

Hou, L. Michel*. Asymptotic stability of systems with saturation constraints.* (1998).

Li, J.H, Michel, W. *Analysis and synthesis of a class of neural networks:variable structure systems with infinite gains.* (1989).

Liu, D. *Cloning template design cellular neural networks for associative networks: Linear Systems operating on a closed hypercube* (1989).

Maxwell, T. *Nonlinear dynamics of artificial neural systems.* In: J.S. Denker.Ed.

Neural networks for computing AIP.conference proceedings. (1986). U.S.A (1982).

Preliminares. (20 de noviembre de 2021). Obtenido de http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/21832/Capitulo1.pdf

Tepan, Eva Cristina Andrade. (Febrero de 2013). *Estudio de los principales tipos de redes neuronales y las herramientas para su aplicacion .* Obtenido de file:///C:/Users/dpir_/Downloads/UPS-CT002584.pdf

Zurada, J.M. (1992). *Introduction to artificial neural systems.*

VIII.ANEXOS

- Matriz de consistencia

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	OBJETIVOS DEL PROBLEMA	HIPOTESÍS	VARIABLES	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
GENERAL	GENERAL	GENERAL			
¿Es posible realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?	Realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	Existe un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	DEPENDIENTE **Modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.**	**Tipo y diseño** El tipo es básico fundamental. El diseño de la investigación es no experimental con un nivel de investigación descriptivo.	No aplica.
ESPECIFICO	ESPECIFICO	ESPECIFICO			**MUESTRA**
¿Es posible que existan soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield? ¿Es posible que las soluciones del problema generalizado de Hopfield converjan a sus puntos de equilibrio?	Demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield. Demostrar que las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a sus puntos de equilibrio.	Existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield. Las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a los puntos de equilibrio.	INDEPENDIENTE **Análisis cualitativo**.	**Método de investigación** El método es básico teórico con enfoque cuantitativo.	No aplica.